MINISTERE DE L'EQUIPEMENT,
DU LOGEMENT, DE L'AMENAGEMENT
DU TERRITOIRE ET DES TRANSPORTS

E.I.T.P.E. 1988

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES (temps accordé : 4 heures)

- Option M -

REMARQUE : Les parties B et C sont indépendantes.

NOTATIONS : E espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur le segment [a,b] de R (a<b). E est supposé muni du produit scalaire :

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt \qquad \text{On notera } \|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle}$$

PARTIE A

On donne N une fonction réelle continue sur [a,b] x [a,b]
N : (x,y) ⟶ N (x,y) telle que :

$$\forall (x,y) \in [a,b] \times [a,b],\ N(x,y) = N(y,x).$$

A toute fonction f de E, on fait correspondre la fonction g = T (f) définie par :

$$\forall x \in [a,b],\ g(x) = \int_a^b N(x,y)\, f(y)\, dy.$$

On dira qu'une fonction U de E est une fonction propre relative au "scalaire associé" λ si $\lambda.T(U) = U$ où U est non nulle et λ un réel.

On notera E_λ l'ensemble des fonctions propres relatives à λ augmenté du vecteur nul de E.

1) Montrer que T est un endomorphisme auto-adjoint de E.

2) Que dire de deux fonctions propres U_1, U_2 relatives à 2 "scalaires associés" λ_1, λ_2 distincts ? On justifiera la conclusion.

Tournez la page S.V.P.

3) Soit h_y : $[a,b] \longrightarrow R$, $x \longrightarrow N(x,y)$. Soit $\{U_1, U_2 \ldots U_n\}$ une famille orthonormale de fonctions propres respectivement relatives à $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ (non necessairement 2 à 2 distincts).

a) Soit G_n le sous espace vectoriel de E engendré par $(U_1, \ldots U_n)$. Quelle est la dimension de G_n ?

Pour tout $i \in \{1, 2 \ldots n\}$, on pose $C_i(y) = \langle h_y, U_i \rangle$.

Montrer que C_i est un élément du sous espace vectoriel Im(T) de E.

Soit $g_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i U_i$ où $(\alpha_1, \ldots \alpha_n) \in R^n$.

Déterminer $\|h_y - g_n\|_2^2$ en fonction de $\|h_y\|_2^2$ des $C_i(y)$ et des α_i.

b) Déduire de la question précédente les valeurs à donner à $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ pour que $\|h_y - g_n\|_2$ ait la plus petite valeur possible.

c) Montrer que : $\forall n \in N^*, \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i^2} \leq \int_a^b \int_a^b [N(x,y)]^2 \, dxdy$.

4) En déduire que l'espace vectoriel E_λ, relatif à un "scalaire associé" λ est toujours de dimension finie.

5)a) Montrer que, pour tout k de N^*, il existe au plus un nombre fini de "scalaires λ associés" tels que $|\lambda| \leq k$.

En déduire que l'on peut ranger ces "scalaires associés" dans une suite finie ou infinie notée (λ_n).

b) Dans le cas où la suite (λ_n) est infinie, montrer que la série $\sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i^2}$ converge.

PARTIE B

On précise dans cette partie :

$$N(x,y) = \begin{cases} [h(x) - h(b)]\,[h(y) - h(a)] \text{ si } a \leq y \leq x \leq b. \\ [h(x) - h(a)]\,[h(y) - h(b)] \text{ si } a \leq x \leq y \leq b. \end{cases}$$

où h est une fonction de classe C^2 sur [a,b] telle que, quel que soit $x \in [a,b]$, $h'(x) \neq 0$.

1)a) Montrer, quel que soit $f \in E$, $g = T(f)$ vérifie $g(a) = g(b) = 0$.

b) Montrer que $g = T(f)$ est de classe C^2 sur [a,b] et donner les expressions de g' et $\left[\frac{g'}{h'}\right]'$ en fonction de h, h', f.

2) Soit G le sous espace vectoriel de E formé des fonctions g de E telles que $g(a) = g(b) = 0$ et de classe C^2 sur [a,b]. Montrer que T est un isomorphisme de E sur G.

3) Pour tout "scalaire associé" λ de T, donner une équation différentielle du second ordre satisfaite par les fonctions U relatives à λ.

4) Soit l'équation différentielle : $y'' - w'y' + ke^w y = 0$ (1) où k est une constante réelle donnée et w une fonction réelle donnée de classe C^1 sur [a,b]. Comment choisir k pour que l'équation (1) admette des solutions f non identiquement nulles telles que $f(a) = f(b) = 0$.

Indication : on pourra utiliser la primitive h_1 nulle en a, de la fonction : $x \longrightarrow e^{w(x)}$ et trouver une condition à vérifier par $\frac{k}{h(b)}$.

5) On prend $a = 0$ et $b = \pi$, $h(x) = x$. Trouver les "scalaires associés" λ_n et les fonctions propres U_n (qui leur sont relatives) de l'application T correspondante et vérifier les résultats du 5 de la partie A.

On admet : $\sum_{n \in N^*} \frac{1}{\lambda_n^2} = \int_a^b \int_a^b (N(x,y))^2 \, dxdy$.

Déterminer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Tournez la page S. V. P.

PARTIE C

Dans cette partie, on pose a = 0 et b = 1. On note S l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall f \in E,\ S(f)(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

1)a) Montrer que :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall f \in E,\ S(f)(x) = \int_0^1 M(x,y)\ f(y)dy$$

où M est une fonction de [0,1] x [0,1] dans R qu'on précisera.

b) On note $S^2 = S \circ S$ et $S^n = S \circ S^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\forall x \in [0,1]$, $\forall f \in E$,

$$S^n(f)(x) = \int_0^1 M_n(x,y)\ f(y)dy.$$

où M_n est la fonction de [0,1] x [0,1] dans R définie par :

$$M_n(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-y)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } x \geq y \\ 0 & \text{si } x < y \end{cases}$$

2)a) S^n ($n \geq 1$) est-elle une application T de la partie A ?

b) Montrer que si f est une fonction de classe C^n sur [0,1] telle que $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, alors $f = S^n(f^{(n)})$. ($f^{(k)}$: fonction dérivée kième de f).

c) Préciser les sous-espaces vectoriels de E : $\mathrm{Im}(S^n)$ pour $n \geq 1$.

3) S et S^2 ont-elles des fonctions propres au sens défini à la partie A ?

On suppose dorénavant que E est muni de la norme : $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

4) Montrer que S et S^n ($n \geq 2$) sont des applications linéaires continues. Quelles sont leurs normes ? On rappelle : $\|S\| = \sup_{\|f\|_\infty = 1} \|S(f)\|_\infty$

5) On note I l'application : $I : E \longrightarrow E,\ f \longrightarrow f$. Montrer que la série $I + S + S^2 + \ldots + S^n + \ldots$ définit une application linéaire continue sur E.

6) En utilisant les résultats précédents, résoudre l'équation $(I-S)(f) = g$ où f est l'inconnue et g une fonction donnée de E.

7) Soit F l'ensemble des applications de classe C^∞ sur [0,1]. Soit D l'endomorphisme de F défini par : $\forall x \in [0,1]$, $D(f)(x) = f'(x)$. Soit U l'endomorphisme de F défini par : $\forall f \in F$, $U(f) = S(f)$. On note J l'application identité dans F.

a) Les endomorphismes de F, U et D, commutent-ils ?

b) Déterminer les noyaux respectifs de J-U et J-D.

c) Soit $g \in F$, déterminer l'image réciproque de {g} par (J-D) .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail